**بسم الله الرحمن الرحيم**

أنا الدكتور **محمد زهير أبوصبيح** من **جامعة الملك فهد للبترول والمعادن** .

أحييكم أعزائي الطلبة وأرحب بكم أجمل ترحيب إلى هذا الدرس من دروس البلوسوم وأرجو أن تكونوا مفعمين بالحيوية والنشاط.

لدينا اليوم مسألة مشوقة وحافلة بالتحديات دعما للمهارات التي تعلمتموها في المدرسة، وستكون مختلفة عما تعلمتموه في الجبر والهندسة والحساب . هذه المواضيع التي سنناقشها اليوم هي جزء من نظرية في الرياضيات تسمى نظرية الرسوم، وهذه النظرية لها تطبيقات عديدة في مجال الدوائر الكهربائية والكومبيوتر ووضع برامج الطائرات وجدولة الطائرات والقطارات.

لنبدأ بمثال بسيط: لدينا ثلاث محطات؛ محطة كهرباء ومحطة ماء ومحطة غاز، ويقابلها ثلاث منازل. ونريد توصيل خط كهرباء وخط ماء وخط غاز لكل من هذه المنازل الثلاث. هل نستطيع عمل ذلك بدون أن تتقاطع الخطوط ؟

أرجو أن تقوموا بهذه التجربة مع زملائكم في الفصل لنرى إذا كان بإمكانكم توصيل المحطات الثلاث بالمنازل الثلاث بدون أن تتقاطع الخطوط .

سوف ألقاكم إن شاء الله بعد قليل

**النشاط الأول**

أهلا بكم أعزائي الطلبة ولنرى هل استطعتم توصيل المحطات الثلاث بالمنازل الثلاث .

والجواب أن ذلك يستحيل فوق سطح الأرض. فماذا لو كان هناك أكثر من ثلاث محطات وأكثر من ثلاث منازل فإن المسألة ستكون أكثر تعقيدا وصعوبة. لنمثل المسألة رياضياً.

فمثلا لو مثلنا المحطات الثلاث بثلاث نقاط في المستوى لنسميها S1 , S2 , S3 والمنازل الثلاث نمثلها بثلاث نقاط H1 , H2 , H3. وما نريد عمله هو توصيل كل محطة من هذه المحطات بالمنازل الثلاث. وكما تعلمون أن الأنابيب أو الأسلاك الكهربائية لا تسير في خطوط مستقيمة دائما وقد تكون متعرجة . مثلا هذا يصل بهذا، وهذا يصل بهذا . الشكل الناتج يسمى رسما ويتكون من مجموعة من الرؤوس: ثلاثة في الأعلى تمثل المحطات ، وثلاثة في الأسفل تمثل المنازل ومجموعة من الخطوط تسمى الأضلاع .

وبشكل عام نعرف الرسم G على أنه يتكون من مجموعتين مجموعة من الرؤوسV ومجموعة أخرى من الأضلاع E بحيث أن كل ضلع يصل بين رأسين مختلفين .

لنأخذ مثال على ذلك ، في هذا الرسم المرسوم أمامكم ، يوجد عندنا مجموعة من الرؤوس

V1, V2, V3, V4, V5, V6

إذن تتكون مجموعة الرؤوس من V= {V1 , V2 , V3 , V4 , V5 , V6 } ، كما أن هناك مجموعة من الأضلاع e1, e2 , e3 , e4 , e5 , e6 , e7 , e8 . أي مجموعة الأضلاع

{e1, e2 , e3 , e4 , e5 , e6 , e7 , e8} = E

إذن هذا الرسم يتكون من مجموعتين من الرؤوس والأضلاع كما ترون في الشكل.

إذا وصل ضلع بين رأسيين 1V و 6V مثلا، أو 2e بين رأسيين 2V و 5V نكتب 1V 6V= 1e .

وكذلك 5V 2V= 2e .

والآن أريد منكم أن ترسموا رسما مكونا من خمسة رؤوس وعشرة أضلاع بحيث لا يربط أكثر من ضلع واحد بين رأسيين مختلفين. قارن الرسم الذي حصلت عليه مع زملائك في المجموعة لنرى هل حصلتم على نفس الرسم أم لا.

ألقاكم بعد قليل.

أهلا بكم أعزائي الطلبة وأتوقع أنكم حصلتم على نفس الرسم وكما ترون على السبورة، هذا الرسم يدعى 5k ويسمى" **الرسم التام** " بحيث أن هناك خمسة رؤوس ويصل بين كل رأسيين مختلفين ضلع واحد فقط .

بشكل عام هناك مجموعتين مهمتين من الرسوم ؛ الأولى تسمى الرسم التام nk ويحتوي على مجموعة من الرؤوس عددها n يصل بين كل رأسيين فيها ضلع واحد. وكذلك هناك مجموعة أخرى مهمة وهي الرسم الثنائي التام. **الرسم الثنائي التام** يتكون من مجموعتين من الرؤوس؛ المجموعة الأولى ولنقل أنها (A) ومجموعة أخرى ولنقل أنها (B) بحيث يصل بين كل رأس في المجموعة الأولى ضلع واحد مع كل رأس في المجموعة الثانية . هكذا .

هذا الرسم بشكل عام إذا كان عندنا m من الرؤوس في المجموعة الأولى و n من الرؤوس في المجموعة الأخرى فيكون الرسم الثاني التام يسمى n,mK .

وهناك خاصية أخرى للرسوم وهي الاتصال . نسمي الرسم رسما متصلا إذا كان يصل بين أي رأسيين في هذا الرسم إما ضلع واحد أو مجموعة من الأضلاع المتتالية وتسمى هذه الأضلاع المتتالية المختلفة تسمى **مسارا**.

لنأخذ مثلا الرسم G المرسوم على هذه السبورة ؛ نلاحظ أنه بين أي رأسيين نأخذهما نجد أن هناك إما ضلع مثل 1V 2V والضلع 6e يصل بينهما بينما 1V و 4V يوجد أكثر من مسار يصل بين هذه الرؤوس ممثلا 8e و 3e هذا مسار يصل بين 1V و 4V . هناك مسارات أخرى مثلا 4e 5e 1e مسار اخر يصل بين 1V و 4V . وكذلك 4e 2e 6e مسار آخر. بينما في هذا الشكل: هذا رسم لا يوجد أي ضلع يصل بين الرأسيين v و u ولا أي مسار؛ يعني منفصلين عن بعض، فهذا الرسم غير متصل بينما يسمى هذا الرسم رسما متصلا.

في هذا الدرس سنتعامل فقط مع الرسوم المتصلة .

والأن حاولوا رسم كل من الرسوم التامة: 5K , 4K , 3K , 2K , 1 K

وكذلك الرسوم الثنائية التامة: 3,3K , 2,2K , 1,2K , 1,1K

أي من هذه الرسوم يمكن رسمها في المستوى أو على الورقة بدون تقاطع أضلاعها.

أهلا بكم مجددا أعزائي الطلبة وأتوقع أنكم حصلتم على نفس النتيجة وهي أن الرسميين 5K و 3,3K لا يمكن رسمهما في المستوى بدون أن تتقاطع أضلاعهما .

وهذا يؤدي إلى التعريف التالي:

**الرسم المستوي:** هو الرسم الذي يمكن رسمه في المستوى بدون أن تتقاطع أضلاعه.

و**الرسم غير المستوي:** هو الذي لا يمكن رسمه في المستوى بدون تقاطع أضلاعه.

فمثلا كما لاحظنا في النشاط أن 3,3K وكذلك 5K هي رسوم غير مستوية لا نستطيع رسمها على الورقة بدون تقاطع أضلاعها . وكذلك أي رسم يحتوي هذه الرسوم كجزء منه يكون رسما غير مستويا. فمثلا لو أخذنا 3,4K . هذا يحتوي 3,3K فهو رسم غير مستوي، ولو أخذنا 6K , 7K , 8K؛ أو أي رسم تام له أكثر من خمسة رؤوس يكون رسما غير مستويا. لنرى رسما مستويا آخر، فمثلا هذا الرسم يمكن رسمه على الورقة بدون أن تتقاطع الأضلاع ونسميه رسما مستويا.

بالعودة إلى مسألة المنازل الثلاث والمحطات الثلاث والتي يمكن تمثيلها بالرسم الثنائي التام 3,3K نرى أن هذه المسألة مستحيل حلها لأن الرسم 3,3K رسما غير مستويا.

والان نعرف مفهوم اخر وهو رسم المستوى .

تعريف: **رسم المستوى**: هو رسم مستوي مرسوم في المستوى دون تقاطع أضلاعه.

فمثلا هذا الرسم هو رسم مستوي لأنه يمكن رسمه في المستوى بدون تقاطع أضلاعه . لكن ليس رسم مستوى . ممكن أخذ هذا الضلع والتي يقطع الضلع الثاني ورسمه خارج الشكل فيكون بذلك رسم مستوى. هذا يسمى رسم مستوى، بينما هذا رسم مستوي وليس رسم مستوى؛ لأنه هنا رسمت الأضلاع بدون تقاطع، بينما هنا تتقاطع الأضلاع في هذه النقطة.

سؤال: ماذا يحصل لو قصصنا الورقة على طول أضلاع رسم المستوى؟

لنرى، في الورقة المرفقة أريد منكم قص الورقة على طول أضلاع الرسم الموجود على الورقة، ومن ثم إيجاد علاقة بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد القطع التي نتجت معكم .

أهلا بكم مجددا أعزائي الطلبة وأرجو أن تكونوا قد توصلتم إلى العلاقة التي تربط عدد الرؤوس بعدد الأضلاع وعدد القطع لرسم المستوى .

نلاحظ أولا أنه عند قص الورقة على طول أضلاع رسم مستوى نحصل على مجموعة من القطع ذات مساحات محدودة، ويحدها أضلاع الرسم، وقطعة واحدة مساحتها غير محدودة هي المساحة الخارجية. نسمي هذه المساحات المحدودة بأضلاع من الرسم **بالوجوه** ونرمز لها بالرمز F.

ثانيا نلاحظ أن عدد الرؤوس 4 وعدد الأضلاع 6 وعدد الوجوه 4، وبذلك يكون عدد الرؤوس ناقص عدد الأضلاع زائد عدد الوجوه يساوي .

لنأخذ مثالا أخر ، فمثلا لو كان عندنا رسم مستوى بهذا الشكل ، ما هو عدد الرؤوس وعدد الاضلاع وعدد الوجوه؟

**أولا** رؤوس الرسم 1,2,3,4,5,6,7,8 أي عندنا 8=|V| . أضلاع الرسم 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12. إذن عدد الأضلاع يساوي 12=|E|. وما هو عدد الوجوه ؟ 1,2,3,4,5 وهناك الخارجي 6 . إذن عدد الوجوه يساوي 6=|F|.

الأن ما هو عدد الرؤوس ناقص عدد الأضلاع زائد عدد الوجوه ؟ هذا يساوي كما ترون 8 زائد 6 يساوي 14 ناقص 12 ويساوي 2 .

إذن بشكل عام هذه هي المعادلة التي تربط بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد الوجوه. وتسمى هذه المعادلة **معادلة أويلر**، ونستطيع برهنة هذه المعادلة باستخدام الاستنتاج الرياضي وسأتركه لكم لكي تبرهنوا صحتها فيما بعد .

توصلنا الى نتيجة ( **معادلة أولير**): ***إذا كان G رسم مستوى يحتوي على v من الرؤوس و e من الأضلاع و f من الوجوه فإن عدد الرؤوس ناقص عدد الأضلاع زائد عدد الوجوه يساوي 2 دائما لأي رسم مستوى.*** أي أن v – e + f = 2

نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسم المستوي بعد تحويله أو رسمه في المستوى بدون تقاطعات ثم نطبق معادلة أويلر.

والان الى النشاط التالي:

ماذا عن الرسوم المرسومة على سطح الكرة أو سطح البالون ؟

فمثلا هذا بالون مرسوم عليه رسم بدون تقاطع للأضلاع هل نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسم المرسوم على سطح البالون ؟

هنا كما تلاحظون مجموعة من الرؤوس ومجموعة من الأضلاع الغير متقاطعة ومجموعة من الوجوه .

كذلك على سطح كرة القدم ، لو اعتبرنا أن التقاطعات هذه تمثل رؤوس الرسم المرسوم على الكرة وهذه هي الوجوه ، فهل نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسم هذا المرسوم على سطح الكرة ؟

ماذا عن الرسوم المرسومة على عجل سيارة، إذا رسمنا رسما كما تشاهدون على عجل سيارة بدون تقاطعات، هذه هي الرؤوس، والأضلاع وكذلك الوجوه .

**سؤال:**

هل نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسوم المرسومة على سطح الكرة بدون تقاطع الأضلاع ؟

وهل نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسوم المرسومة على عجل سيارة بدون تقاطع الأضلاع ؟

ما هي العلاقة بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد الوجوه في كل حاله؟

**نشاط**

أهلا بكم أعزائي الطلبة وأرجو أن تكونوا قد توصلتم إلى العلاقة التي تربط بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد الوجوه للرسوم على سطح الكرة وكذلك على سطح العجل.

فأما على **سطح الكرة** فإن العلاقة هي :

***عدد الرؤوس ناقص عدد الأضلاع زائد عدد الوجوه يساوي 2. وهي نفس العلاقة للرسوم في المستوى.*** أي v – e + f = 2

بينما على **سطح العجل** نجد أن العلاقة هي :

***عدد الرؤوس ناقص عدد الأضلاع زائد عدد الوجوه يساوي صفر.*** أي v – e + f = 0

وهذا الاختلاف يبن الرسوم على سطح العجل وسطح الكرة

الأن نريد أن ننتقل إلى موضوع اخر وهو موضوع تلوين الخرائط وتلوين الرسوم . أخذتم في الجغرافيا في السابق كيفية تلوين الخرائط. إذا كان عندنا خارطة لمجموعة من الدول ونريد أن نلون هذه الخارطة بألوان مختلفة بحيث أن كل بلدين متجاورين لهما لونان مختلفان .

سؤال: ما هو أقل عدد ممكن من الألوان نحتاج إليه لتلوين مناطق المملكة بحيث أن كل منطقتين متجاورتين (أي بينهما ضلع مشترك ) تلونان بلونين مختلفين؟

وهل ينطبق هذا العدد على جميع الرسوم المرسوم في المستوى ؟ (أي رسوم المستوى) ؟

**نشاط**

أهلا بكم أعزائي الطلبة مرة أخرى وأرجو أن تكونوا قد توصلتم إلى أقل عدد من الألوان اللازمة لتلوين أي خارطة في المستوى . وهذا العدد هو أربعة كما تشاهدون على الرسم .

لنأخذ مثالا آخر، ففي الرسم الذي أمامكم هنا وهو رسم مستوى، نستطيع تلوين وجوه الرسم بأربعة ألوان، فمثلا يلون الوجه الأول باللون الأخضر والمجاور له بلون أحمر ، وهذا باللون الأزرق ، فيبقى عندنا الوجه الخارجي والذي نستطيع تلوينه باللون الأسود .

وبذلك نرى أن أربعة ألوان كافية تماما لتلوين خارطة المملكة وكذلك لتلوين أي خارطة في المستوى .

نتيجة : (هذه النتيجة تسمى **نظرية الألوان الأربعة** ) وتنص على أن ***"أي رسم مستوى يحتاج إلى أربعة ألوان أو أقل لتلوين وجوهه بحيث أن كل وجهين متجاورين لهما لونان مختلفان*" .**

وعلى بساطة نص هذه النظرية (نظرية الألوان الأربعة) فقد تبين أن برهانها ليس بالعملية السهلة وأنه صعب جداً.

والان لنرى كيف استفاد المهندسون من نظرية الرسوم في مسائلهم المعقدة.

لنأخذ مثلا لوحة الكمبيوتر أو بما يسمى (Mother board). انظروا إلى هذه اللوحة كم يوجد فيها من رؤوس وكم يوجد فيها من أضلاع أو توصيلات. سواء على الوجه الأمامي أو على الوجه الخلفي لهذه اللوحة.

كيف استطاع العلماء أو المهندسون بشكل خاص تلافي مشكلة التقاطعات بين هذه التوصيلات ؟

أنتم تعلمون أن هذه الدوائر الكهربائية تتم طبعاتها بالات تنزل هكذا بالقصدير وترسم الخارطة الكهرائية .

كيف تلافى المهندسون التماس الكهربائي ؟؟

لنأخذ مثالا أبسط من لوحة الكمبيوتر وهي لوحة الآلة الحاسبة . كما ترون أن لوحة الآلة الحاسبة تتكون من دوائر كهربائية والتي نستطيع تمثيلها باستخدام نظرية الرسوم .

هذه هي الرسمة المقابلة والتي تمثل الدوائر الكهربائية. والان أريد منكم أعزائي الطلاب أن تعملوا ضمن مجموعات على اللوحات المعطاة لكم والتوصيل بين هذه الرؤوس كما هو موجود في الرسمة التي شاهدتموها والتي تمثل لوحة الآلة الحاسبة بحيث أن هذه الأسلاك لا تتقاطع ، لأن تقاطعها قد يحدث تماس كهربائي . ألقاكم بعد قليل.

نشاط

أهلا بكم مجددا أعزائي الطلبة وأرجو أن تكونوا قد لاحظتم كيف تغلب المهندسون على مشكلة التقاطعات والتماس الكهربائي وذلك بثقب الألواح . ولتلافي أي تقاطع يتم ثقب اللوح والتوصيل من الخلف.

بهذا نكون قد أتينا إلى نهاية هذا الدرس .

والخلاصة من هذا الدرس أننا تعلمنا :

* خواص الرسوم المستوية
* معادلة أويلر التي تربط عدد الرؤوس بعدد الأضلاع والوجوه بالمعادلة V - E + F = 2.
* نظرية الألوان الأربعة: أي رسم مستوى يحتاج إلى أربعة ألوان أو أقل لتلوين وجوهه بحيث أن كل وجهين متجاورين لهما لونان مختلفان.
* طريقة التخلص من التقاطعات في الدوائر الكهربائية.

بهذا نكون قد أنهينا درس اليوم في أحد فروع الرياضيات وأرجو أن تكونوا قد حصلتم على مادة شيقة مما يدفعكم إلى المزيد من البحث والاستقصاء في الرياضيات ومكنونات هذا الكون وما حولنا والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته .